

Flächen berechnen

Achten Sie auf Nullstellen und Schnittstellen: Flächen unterhalb der x-Achse liefern negative Integrale.

Aufgaben

1. **Berechnen** Sie die Fläche, die der Graph von $f(x) = x^2 - 4$ mit der x-Achse einschließt.
2. **Berechnen** Sie die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x$.
3. Gegeben ist $f(x) = x^3 - x$. **Berechnen** Sie $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$ und die Fläche, die der Graph im Intervall $[-1; 1]$ mit der x-Achse einschließt. **Erklären** Sie den Unterschied.

Lösungshinweise: Flächen berechnen

1. Nullstellen: $x = -2$ und $x = 2$. $\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = [x^3/3 - 4x]_{-2}^2 = (8/3 - 8) - (-8/3 + 8) = -32/3$.
Die Fläche liegt unter der x-Achse: $A = 32/3 \approx 10,67$.
2. Schnittstellen: $x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 2$. Im Intervall liegt g oben: $A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = [x^2 - x^3/3]_0^2 = 4 - 8/3 = 4/3$.
3. Nullstellen $-1, 0, 1$. $\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = 1/4$, $\int_0^1 (x^3 - x) dx = -1/4$, also $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$. Die Fläche ist $A = 1/4 + 1/4 = 1/2$. Das Integral verrechnet Flächen ober- und unterhalb der x-Achse, deshalb muss man an den Nullstellen aufteilen.